Preuve
International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof

La Lettre de la Preuve
Printemps 2003

On line material

OBSERVACIÓN Y DISEÑO EN PRUEBAS MATEMÁTICAS

Willi Dörfler

Institut für Mathematik, Universität Klagenfurt, Austria

Traducido por Humberto Alagia, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

La lettre de la Preuve : http://www-didactique.imag.fr/preuve

OBSERVACIÓN Y DISEÑO EN PRUEBAS MATEMÁTICAS

Willi Dörfler

Institut für Mathematik, Universität Klagenfurt, Austria

Introducción

Esta contribución se ubica en el contexto de la filosofía de la matemática del filósofo pragmatista norteamericano Ch. S. Peirce. Pero puede ser leído y comprendido sin un conocimiento detallado de la posición de Peirce. El lector interesado puede consultar los artículos de Dörfler (2003a; 2003b) o de Hoffmann (2001, 2002), en especial en relación con las nociones introducidas por Peirce de diagrama y razonamiento diagramático para explicar, por un lado, lo estricto de las pruebas matemáticas y, por el otro, la posibilidad de invenciones y construcciones en matemática, o como Peirce las llama, "observaciones sorprendentes". A propósito dice (en Peirce, Collected Papers 3.363):

> Desde hace tiempo causa perplejidad cómo puede pasar que la matemática sea de naturaleza puramente deductiva y saque sus conclusiones apodícticamente y, a la vez, produzca una rica serie, aparentemente sin fin, de descubrimientos sorprendentes, como cualquier ciencia observacional. Varias han sido las tentativas para resolver la paradoja, intentando invalidar una u otra de esas afirmaciones, pero sin éxito. La verdad, sin embargo, parece ser que todo razonamiento deductivo, aun un simple silogismo, contiene un elemento de observación; a saber, la deducción consiste en la construcción de un ícono o diagrama tales que las relaciones de sus partes deben presentar una analogía completa con las relaciones entre las partes del objeto de razonamiento, de experimentar sobre esta imagen en la imaginación y de observar el resultado para descubrir relaciones no percibidas y ocultas entre las partes. ...Respecto del Álgebra la idea central del arte es que presenta fórmulas, que pueden ser manipuladas y, al observar los efectos de tal manipulación encontramos propiedades que de otra forma no podrían discernirse. En esas manipulaciones nos guiamos por descubrimientos previos, que están contenidos en fórmulas generales. Estas son *patterns*, que tenemos el derecho de imitar en nuestro procedimiento, y son los íconos por excelencia del álgebra.

De lo expuesto es claro que los diagramas pueden ser muy variados: tanto figuras geométricas como también expresiones algebraicas. En resumen, en Peirce los diagramas son signos especiales (icónicos) que tienen una estructura clara y reconocible y que pueden ser manipulados de acuerdo con reglas (convencionales) para transformaciones y composiciones (ver otra vez los artículos citados antes). El punto principal de todo eso es que la observación empírica y perceptiva se vuelve una parte decisiva del razonamiento matemático, del diseño y comprensión de pruebas y razonamientos matemáticos. Con esta concepción la matemática no es tanto el manejo de ideas abstractas en nuestra mente sino la observación de los efectos de nuestra manipulación de diagramas. Las ideas matemáticas más bien están en la invención de diagramas y en sus fructíferas manipulaciones, transformaciones, composiciones. En este sentido la matemática estudia las propiedades generales y las regularidades de ciertos diagramas y las operaciones con ellos. De acuerdo con el concepto triádico de signo de Peirce, esos diagramas serán interpretados por sus usuarios de muchas maneras diferentes así como también se relacionarán con “objetos” (en el sentido de Peirce). Estoy analizando aquí, en cierta forma, solo el signo (representamen) de la tríada de Peirce “signo, objeto, interpretante”, pero esto parece ser de importancia crucial para la matemática.

Del razonamiento con diagramas deriva también la absoluta confiabilidad y seguridad de la matemática, la así llamada necesidad lógica. Esto diferencia también la observación de diagramas de la observación empírica en las ciencias experimentales. En la observación de diagramas ‘se ve’ que una cierta relación será válida en todos los casos concebibles del respectivo tipo de diagrama. Esto puede hacerse por el carácter genérico de las diagramas (matemáticos): cada caso particular o muestra, presenta totalmente el respectivo tipo, de acuerdo con una perspectiva adecuada de la muestra. Digamos, por ejemplo, cualquier inscripción de la letra ‘a’ presenta a esa letra (como un tipo de inscripciones bajo una cierta perspectiva). Finalmente ponemos énfasis en que el razonamiento con diagramas es muy diferente de los cálculos algorítmicos. Aunque está basado en reglas necesita creatividad e inventiva, como para componer música.

OBSERVAR DIAGRAMAS

En esta sección presentaré algunos ejemplos que, espero, proporcionen al lector la experiencia que las pruebas matemáticas, en muchos casos, dependen de la observación de relaciones estructurales y regularidades que aparecen en las transformaciones de diagramas. Otros ejemplos pueden verse en Dörfler (2003a). En todos los ejemplos los resultados de ‘experimentos’ previos con diagramas se usan como fórmulas establecidas o ‘teoremas’.

Hay el siguiente resultado sorprendente: 11x11=121, 111x111=12321, 1111x1111=12234321, etc. Esto puede explicarse observando un diagrama como:

1	1	1	1	1	1	1	x	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1								
	1	1	1	1	1	1	1							
		1	1	1	1	1	1	1						
			1	1	1	1	1	1	1					
				1	1	1	1	1	1	1				
					1	1	1	1	1	1	1			
						1	1	1	1	1	1	1		
1	2	3	4	5	6	7	6	5	4	3	2	1		

Una de las reglas usadas aquí es el algoritmo de multiplicación decimal que por si mismo no predice las relaciones observadas en los diagramas precedentes. La ‘comprensión’ de los resultados sorprendentes resulta del reconocimiento del *pattern* de 1’s producido por el algoritmo. La interpretación común usual de los símbolos puede ser útil pero el punto esencial consiste en la observación perceptiva del resultado de las operaciones que uno hace con los diagramas. Éstas valdrían aun si no hubiese una interpretación de los símbolos como números.

Una condición previa para este razonamiento con diagramas es claramente una familiaridad con los diagramas y competencia en sus operaciones. Quizá esto ilumina de manera nueva el papel de los ‘cálculos’ concebidos en un sentido más amplio como operaciones inteligentes con diagramas. Basado en esas primeras observaciones hay un rico espacio para más experimentos con diagramas y experimentos de pensamiento con esos diagramas. Es también posible cambiar las reglas para los diagramas, por ejemplo elegir diferentes bases para el sistema posicional.

El próximo ejemplo -así como otros- también es bien conocido y sólo sirve para orientar la atención del lector hacia el papel de la percepción, observación, reconocimiento de *patterns* y manipulación de inscripciones concretas como parte constitutiva del pensamiento matemático.

Se dice que el joven Gauss encontró la suma de los primeros 100 enteros positivos pensándolos como escritos en la siguiente forma

1	2	3	4	…	49	50
100	99	98	97	…	52	51

y sumando los dos números en cada una de las cincuenta columnas para obtener 50x101=5050 como la suma buscada. Esto es muy similar a nuestro primer ejemplo: un cierto *pattern* reconocido en un diagrama da el resultado. Aquí el carácter genérico (para números pares) puede verse: un experimento mental con el diagrama respectivo da la fórmula $((n/2)x(n+1))$. Otros experimentos con esos diagramas conducen a otro, más general para *n* arbitrario, como el siguiente

1	2	3	4	5	6	7
7	6	5	4	3	2	1

No niego que una comprensión de los símbolos como números naturales es útil o aun necesaria para reconocer el *pattern* en cuestión. Pero para el *pattern* una cierta regularidad, a saber suma constante de las columnas, es de la mayor importancia y eso no está inherentemente relacionado con los números naturales. De esta forma el diagrama se agrega a las propiedades conocidas de los números naturales y amplía el conocimiento sobre ellos. Muchos otros *patterns* de números pueden analizarse similarmente, tales como números triangulares, cuadrados, rectangulares. En todos los casos además de presentaciones simbólicas, las gráficas donde se usan arreglos de puntos es otro tipo de razonamiento con diagramas basado en experimentos y observación de estructuras de diagramas. A eso ya apuntan nombres como ‘triangular’, ‘cuadrado’ o ‘rectangular’. vector

Dentro del Álgebra Lineal se encuentra un tesoro de ejemplos para razonar con diagramas. Aquí los diagramas básicos son matrices y sus operaciones. Consideremos $A = (a_{ij})$ una matriz **(*m* x *n*)** y $\alpha = (a_j)$ una matriz (vector) **(*n* x 1)**.

Entonces la *i*-ésima componente del producto es

$$a_{i1}a_1 \quad + \quad a_{i2}a_2 \quad + \quad \cdots \quad + \quad a_{in}a_n$$

o, con más detalle, el vector

$$\begin{array}{ccccccccc} b_1 & = & a_{11}a_1 & + & a_{12}a_2 & + & \cdots & + & a_{1n}a_n \\ b_2 & = & a_{21}a_1 & + & a_{22}a_2 & + & \cdots & + & a_{2n}a_n \\ & & & & \cdots & & & & \\ b_m & = & a_{m1}a_1 & + & a_{m2}a_2 & + & \cdots & + & a_{mn}a_n \end{array}$$

Una investigación empírica de este diagrama exhibe una regularidad en las columnas que puede expresarse como

$$A\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n$$

donde $\alpha_j = (a_{ij})$ es el j-ésimo vector columna de ***A***. Este resultado es consecuencia estricta de las reglas de operaciones con matrices y el diagrama anterior no puede dudarse, es un argumento apodíctico aunque (o posiblemente porque) está basado en un reconocimiento de *patterns*.

Una vez que un *pattern* se establece como fórmula o teorema, puede usarse provechosamente para derivar más consecuencias. Si α es el í-ésimo vector unitario $\varepsilon_i (a_j = 0 \text{ for } j \neq i, a_i = 1), i = 1, \ldots, n$, entonces $A\varepsilon_i = \alpha_i$, que por supuesto puede reconocerse también con otros diagramas. Aquí se vuelve aun más notable que lo importante son las reglas operativas y no tanto el significado (referencial) de los símbolos manipulados. Solamente usamos nuestro conocimiento sobre cómo operar con símbolos. Pero no por eso es un juego sin sentido, meramente formalista: descubrimos relaciones sorprendentes y fascinantes para los diagramas. Así los diagramas juegan papeles variados. Por un lado son objetos de razonamiento cuyas propiedades son detectadas y descriptas (por nuevos diagramas). Por otro lado, los diagramas son medios del razonamiento matemático por los cuales relaciones y regularidades se vuelven *patterns* observables.

Como otro ejemplo estudiamos una de las pruebas de la regla de Cramer para la solución un sistema lineal cuadrado no singular, de ecuaciones lineales $Ax = b; A = (a_{ij})$ una matriz nxn; $x = (x_i)$, el vector solución; y $b = (b_i)$ el término independiente. Entonces por hipótesis la inversa A^{-1} (con $AA^{-1} = A^{-1}A =$

matriz identidad) existe y de operaciones previas con diagramas se sabe que $A^{-1} = \left(A_{ji} / |A|\right)$ donde $|A|$ es el determinante y A_{ji} es el cofactor de a_{ji} en A. Entonces $x = A^{-1}b$ y por consiguiente
$x_i = (1/|A|)(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n)$

Ahora observamos que $A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n$ es el resultado de desarrollar la siguiente matriz A_i por la *i*-ésima columna

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ya que A_{ji} es el cofactor apropiado que resulta de eliminar la *j*-ésima fila y la *i*-ésima columna en A_i o, equivalentemente, en *A*. Entonces $x_i = |A_i| / |A|$. Es claro que esto se reconoce observando *patterns* invariantes cuando uno realiza operaciones o experimentos con diagramas. Para esto una experiencia profunda con los diagramas y sus propiedades previamente observadas, es indispensable. Por supuesto, varios experimentos de prueba con los diagramas son necesarios antes de que un *pattern* útil se descubra. En todo caso el escrutinio de los diagramas es el núcleo de la 'invención' de una prueba. Retrospectivamente esto podría presentarse como la 'idea de la prueba'. Por eso no deberíamos esperar que nuestros estudiantes en cualquier nivel sean capaces de producir pruebas sin trabajo intensivo previo sobre los respectivos diagramas. El lector podría interpretar esto, por ejemplo en el caso de pruebas en la geometría Euclidiana. Se alienta también al/a lector/a a mirar un libro de texto estándar sobre Álgebra Lineal y leer algunas de las pruebas como razonamiento con diagramas. Se observará una y otra vez la importancia de observar y reconocer *patterns* de relaciones en los diagramas producidos que son constitutivos de la prueba respectiva. Algunos ejemplos instructivos son: rango fila es igual al rango columna; la matriz de una transformación lineal; cambio de base y transformaciones lineales. Por supuesto que ya las operaciones básicas con matrices son buenos ejemplos de razonamiento con diagramas.

Leer una prueba (con diagramas) terminada requiere primero pericia para reconocer *patterns* en diagramas. Diseñar una prueba ser basa mayormente en inventar nuevos diagramas o partes de ellos. Esto aparece más claro en las pruebas geométricas en la forma de líneas y figuras auxiliares. Aquí me abstendré de estudiar pruebas geométricas porque los diagramas en el razonamiento matemático puede ser más inesperado en otros campos. Para el Cálculo ver Dörfler (2003a).

Como otro ejemplo de una invención importante considero la prueba estándar de la Desigualdad de Cauchy-Schwarz para el producto escalar

(α,β), i.e. $(\alpha,\beta)^2 \leq (\alpha,\alpha) \quad (\beta,\beta)$. Uno inventa un nuevo diagrama $(\alpha + x\beta, \alpha + x\beta)$, x un número real y después observa la transformación $0 \leq (\alpha + x\beta, \alpha + x\beta) = (\alpha,\alpha) + 2x(\alpha,\beta) + x^2(\beta,\beta)$ donde se usan las propiedades convencionales del producto interno. Por razonamientos con diagramas con polinomios cuadráticos uno sabe que $b^2 - 4ac \leq 0$ si $ax^2 + bx + c \geq 0$ para todo *x*. Para el diagrama de arriba esto da

$$4(\alpha,\beta)^2 - 4(\alpha,\alpha)(\beta,\beta) \leq 0$$

que es la desigualdad buscada.

Es claro que este tipo de razonamiento con diagramas presupone una sólida familiaridad con el manejo de símbolos y con la atribución de generalidad a las respectivas expresiones. Así y todo las operaciones con diagramas y su observación contribuye a todo esto y constituye el núcleo de la prueba, su rigor y seguridad. Es decir que la matemática no se reduce al razonamiento con diagramas pero éste es una componente esencial de su cualidad específica y carácter. En particular, tener a mano una gran cantidad de diagramas, relaciones y operaciones de diagramas es una precondición para la inventiva matemática y las ideas productivas. Estas ideas son a menudo diagramas de algún tipo, ricos y productivos. Tomemos como ejemplo el triángulo de Pascal en Combinatoria o, quizá simples relaciones numéricas cuando se desarrolla el 'sentido numérico' (*number sense*).

DISEÑO

En esta sección presentaré ejemplos de un tipo particular de pruebas: son aquellas que consisten de un diseño ad hoc o en la construcción de cierto tipo de diagramas o en la prueba de la posibilidad de tal construcción. En cierto sentido son pruebas de existencia constructivas que exhiben diagramas con las propiedades deseadas. Un ejemplo simple es la prueba de que entre dos fracciones m/n y p/q cualesquiera hay otra: suponiendo que $m/n < p/q$ resulta $mq < np$ ya que $mq/nq < np/nq$. Entonces para cualquier k entre $2mq$ y$2np$ la fracción $k/2nq$ satisface la condición. También la prueba de Euclides que para cualquier conjunto de números primos puede encontrarse otro primo que no pertenece al conjunto es de este tipo.
En el siguiente ejemplo, en principio, no parece que el diseño de diagramas esté en el centro de su prueba. Se trata del conocido teorema de Kronecker sobre la existencia de raíces de polinomios. Más técnicamente dice: Para cualquier polinomio *P(x)* sobre un cuerpo *F* (o sea, los coeficientes del polinomio son elementos del cuerpo) hay una extensión F_1 de *F* donde *P* tiene una raíz (o sea en F_1 hay un elemento *r* con *P(r)*=0 en F_1). Podemos suponer que *P* es irreducible sobre *F* (que no es producto de dos polinomios sobre *F* de grado 1 al menos). Empezamos la prueba considerando al anillo *F(x)* de todos los polinomios sobre *F*,

que puede ser mirado como una clase de diagramas en nuestro sentido. Entonces la construcción general del cuerpo $F(x)/P(x)$, de *F(x)* modulo *P(x)*, puede emplearse. Así tenemos $p_1 = p_2(P)$ si $p_1 - p_2$ es un múltiplo de *P* en *F*(x). Si denotamos por [*p*] la clase de $p \in F(x)$, las operaciones de cuerpo en las clases son dadas por $[p_1]+[p_2]=[p_1+p_2]$ y $[p_1]x[p_2]=[p_1 x p_2]$. Estas últimas definiciones son diagramas pero la noción de clase de equivalencia no es diagrama. Pero toda la construcción puede describirse fácilmente con diagramas. En cada clase de $F(x)/P(x)$ hay un único polinomio p de grado menor que el de *P*. Si *n* es el grado de *P* entonces $F(x)/P(x)$ puede verse como el conjunto de todos los polinomios $a_0 + a_1 x + \ldots a_{n-1} x^{n-1}$ sobre F con la adición usual y una multiplicación que es el producto de polinomios módulo *P*. Se demuestra, manipulando diagramas, que esas operaciones satisfacen todas las propiedades de un cuerpo. El cuerpo *F* está claramente contenido en el nuevo cuerpo $F_1 = F(x)/P(x)$ y así podemos considerar a *P* como un polinomio sobre F_1. Entre todos los diagramas de este cuerpo está el diagrama especial *x* (cuando $a_0 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0$ y $a_1 = 1$); para este diagrama, de acuerdo con las reglas de diagramas de F_1 ocurre que $P(x) = 0$ en F_1 porque $P(x) = 1 \cdot P(x) + 0$, es decir que 0 es el resto de dividir *P* por *P*. Pero esto es lo mismo que decir que *x* es una raíz de *P* en F_1. En resumen: la prueba puede interpretarse con diagramas como el diseño de una clase de diagramas F_1 que contiene los elementos de *F*, tal que es una extensión del cuerpo *F*. Y en F_1 hay un diagrama *r* (= *x*) que es una raíz de *P* sobre F_1. La propiedad importante de esta prueba por diseño es que podemos construir un diagrama *r* que es una raíz de P (esto es sencillo, simplemente decimos que *r* tiene la propiedad $P(r) = 0$) y que es un elemento de una extensión del cuerpo (ésta es la parte difícil y posiblemente sorprendente). Ontológicamente, el teorema y su prueba no son sobre objetos abstractos sino objetos perceptibles, observables y materialmente manipulables, los diagramas $a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$. El caso especial más conocido de esto es el de los números complejos donde *F* = *R* (los números reales) y $P(x) = x^2 + 1$. Los diagramas que resultan son de la forma $a + bx$ y
$x = i$ es una raíz de $x^2 + 1$ en $F_1 = C$. El producto en F_1 F_1 resulta de $(a+bx)(c+dx) = ac + (ad+bc)x + bdx^2 = (ac-bd) + (ad+bc)x + bd\left(x^2+1\right)$ lo cual en F_1, es decir ‘módulo x^2+1 es $(ac-bd)+(ad+bc)x$. El lector reconocerá el producto usual en C si escribimos $a+bi$ en vez de $a+bx$. Los diagramas en ***C*** pueden diseñarse más directamente, sin usar polinomios. Esto se hace considerando todos los diagramas de la forma $a+bi$ y definiendo la suma y el producto basados en $i^2 = -1$ (éste es, otra vez, un diagrama estipulado) y demostrando por manipulación de diagramas que resulta un cuerpo. Si nos centramos en los diagramas, su diseño y sus operaciones, en vez de buscar ‘números’ que se denotan por esos diagramas, su construcción se vuelve no sólo racio-

nal sino aun perceptible y observable. De esta forma los números complejos pierden su usual cualidad imaginaria, mítica. Los diagramas contribuyen a la desmitificación de la matemática. Pero en el caso de C esto no plantea problemas específicos.

Para que el diseño de una raíz de $P(x)$ y de un cuerpo que la contenga sea aun más transparente elegimos el caso particular de $F = Z_5$, el cuerpo de números enteros módulo 5 que escribimos como {0, 1, 2, 3, 4, 5}. Consideremos el polinomio $P(x) = x^2 + 2$, que claramente no tiene una raíz en Z_5: en éste cuerpo los cuadrados son 0, 1 y 4. Los elementos en $F(x)/P(x)$ son entonces los diagramas $a + bx, a$ y b en $Z_5\, Z_5$, en total 25 elementos, entre ellos todos los de $Z_5\, Z_5$ y elementos como $2x, 3x, 4x, 2 + 3x$; Para la suma tenemos por ejemplo $(2 + 3x) + (3 + x) = 0 + 4x = 4x$ y para el producto $(2 + 3x)(3 + x) = 1 + 2x + 4x + 3x^2 = 1 + x + 3x^2 = x + 3(x^2 + 2) = x$ módulo *P*.

Esto se obtiene más fácilmente si usamos que $x^2 = -2 = 3$ en Z_5 o, mejor, en F_1. Después es un asunto de razonar con diagramas para convencernos que todos estos diagramas recién diseñados, con sus operaciones de suma y de producto, son un cuerpo. La mayoría de las propiedades son consecuencia directa de las correspondientes propiedades válidas en Z_5.Para la inversa multiplicativa hay que resolver la ecuación $(a + bx)(c + dx) = 1$ con *a*, *b* dados para $c, d \in Z_5$. Si *b* = 0 entonces $c = 1/a$ y *d* = 0; si no $c = a/(a^2 + 2b^2)$ y $d = (-b)/(a^2 + 2b^2)$ (observemos que $a^2 + 2b^2 \neq 0$ para todo $a, b \in Z_5$ que no sean ambos nulos). En este caso (finito) uno tiene una colección completa de todos los diagramas y no hay necesidad alguna de objetos abstractos que los diagramas posiblemente representen. Al menos en estos casos, la matemática es sobre la escritura y manipulación de diagramas de acuerdo con reglas convencionales que derivan de propósitos e intenciones específicos, que pueden considerarse como un posible interpretante de los diagramas (los signos) en el sentido de Peirce. Quizá uno deba tomar los diagramas como sus propios objetos para completar para completar la relación triádica de Peirce.

Un análisis similar puede realizarse para muchas otras ‘construcciones matemáticas’. He aquí algunos otros ejemplos: producto directo de estructuras algebraicas (el diseño es la escritura de pares ordenados; diseño de geometrías finitas; existencia de grafos (combinatorios) con ciertas propiedades.

CONCLUSIÓN

Espero que el lector haya obtenido una idea de qué es el razonamiento con diagramas, de su poder y su utilidad en la matemática. Pero me apuro a enfatizar que la matemática no puede y no debe ser reducida a diagramas. Hay métodos poderosos del pensamiento y razonamiento matemáticos que parecen evadir los métodos con diagramas, ver Dörfler (2003b). También, posiblemente, sea de gran interés para el aprendizaje de la matemática, la intrincada relación entre presentaciones con diagramas y otras formas de presentación de ideas matemáticas, sus relaciones y diferencias.

Referencias

Dörfler, W. (2003a). Diagrams as Means and Objects of Mathematical Reasoning. To appear in: Developments in Mathematics Education in German-speaking Countries. Selected Papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics.

Dörfler, W. (2003b). Diagrammatic Thinking: Affordances and Constraints. To appear in: Activity and Sign – Grounding Mathematics Education (eds. M. Hoffmann, J. Lenhard and F. Seger).

Hoffmann, M. H. G. (2001). Skizze einer semiotischen Theorie des Lernens. In: Journal für Mathematik-Didaktik 22(3/4): 231-251.

Hoffmann, M. H. G. (2002). Peirce's "Diagrammatic Reasoning" as a Solution of the Learning Paradox. In: The Quiet Revolution: Essays on Process Pragmatism. Ed. Guy Debrock. Amsterdam et al.: Rodopi Press: 147-174.

Peirce, CH. S. (1931-1958): Collected Papers, vol. I-VIII. Harvard University Press, Cambridge, Mass.

Los trabajos de Dörfler (2003a, b) serán enviados por correo electrónico si se solicitan al autor a willi.doerfler@uni-klu.ac.at

Willi Dörfler
Institut für Mathematik
Universität Klagenfurt
A-9020 Klagenfurt, Austria

Nota del Traductor:

En castellano una referencia sobre Peirce adecuada a lo que dice el autor es:

Deladalle, G., (1996). *Leer a Peirce hoy*. Gedisa Barcelona.

¿Reacciones?¿Observaciones?

Reacciones y observaciones a la contribución de Willi Dörfler

seran publicadas en la carta de verano 2003.

Traducción, Humberto Alagia from the University of Cordoba in Argentina